Jordan Canonical form

$F = \mathbb{C}$, $V/\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} V < +\infty$.

$T: V \to V$. $\mathbb{C}$-linear

Smith normal form $\Rightarrow V \cong \bigoplus_{i,j} \mathbb{C}[\lambda]/(p_i)^{n_{ij}}$

p_i irreducible over $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$

$p_i = (\lambda - \lambda_i)$.

分析 $\mathbb{C}[\lambda]/(\lambda-\lambda_i)^{n_{ij}}$

$\lambda_i = 0$ 时, $W = \mathbb{C}[\lambda]/(\lambda^n)$, $T: W \to W$. 有矩阵

$$\lambda\cdot(1,\lambda,\cdots,\lambda^{n-1}) = (1,\cdots,\lambda^{n-1})\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{bmatrix}$$

或者

$$\lambda(\lambda^{n-1},\cdots,\lambda,1) = (\lambda^{n-1},\cdots,1)\begin{bmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&0\end{bmatrix}$$

记为 $J_{0,n}$

好处是第一个是 eigenvector.

(W,T) 特征值只有 0. 几何重数 $=1$.

一般的 λ_i,

$$W = \mathbb{C}[\lambda] \big/ \left((\lambda - \lambda_i)^n \right)$$

则 W has a basis

$$B : (\lambda-\lambda_i)^{n-1},\ (\lambda-\lambda_i)^{n-2}, \ldots, 1$$

$$(\lambda-\lambda_i)\cdot\left((\lambda-\lambda_i)^{n-1}, \ldots, 1\right)$$

$$= \left((\lambda-\lambda_i)^{n-1}, \ldots, 1\right)\cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

λ_i 特征值

则 $$\lambda \cdot B = B \cdot \underbrace{\left(\lambda_i I + J_{0,n}\right)}_{=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}}$$ ← 记为 $J_{\lambda,n}$

由以上讨论知 $F=\mathbb{C}$ 时，

$\forall A\in M_n(\mathbb{C})$ 相似于

$$A \sim \begin{bmatrix} J_{\lambda_1,n_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_s,n_{s,k_s}} \end{bmatrix}$$

以下讨论 n_{ij} 如何由 A 唯一确定.

先讨论如何由 $T: V\to V$ 定出

$W_i = \bigoplus_j \mathbb{C}[\lambda]/(\lambda-\lambda_i)^{n_{ij}}$ 相同的 λ_i.

$\mathrm{Ann}(T|_{W_i}) = (\lambda-\lambda_i)^{\underline{\max_j n_{ij}}}$ 记作 n_i.

一方面: $W_i = \ker((T-\lambda_i)^{n_i})$

所以 W_i 由 T 唯一确定. 且

$\ker((T-\lambda_i)^{n_i}) = \ker((T-\lambda_i)^{n_i+1}) = \cdots$

定义：(广义特征子空间)

$$V[\lambda_i] = \{ v \mid \exists n \ \text{s.t.} \ (T-\lambda_i)^n v = 0 \}$$

$$\dim V[\lambda_i] = \sum_j n_{ij}$$

如何确定每一个 n_{ij}

$\dim \ker(T-\lambda_i) = r_1$ = 对固定 i，n_{ij} 的个数。

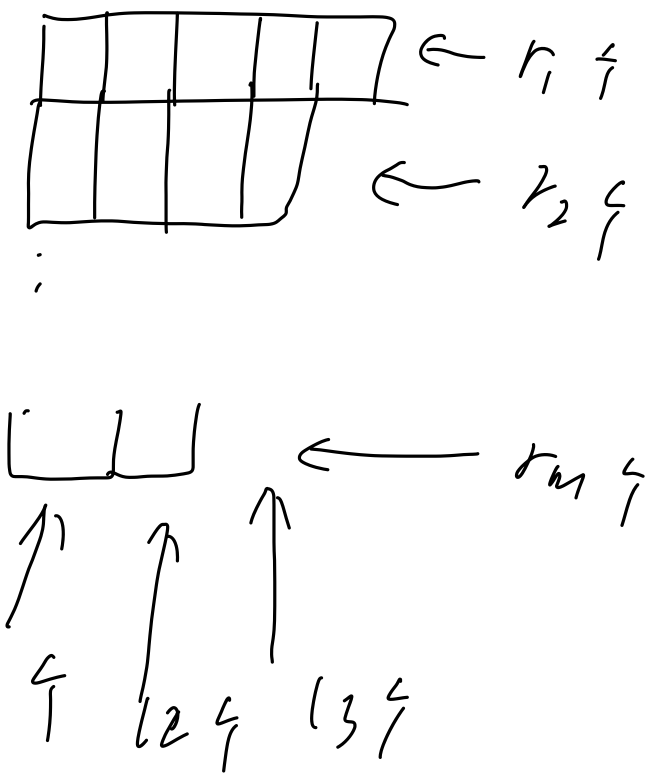
(或者若当块的个数 i 对应)

$\dim \ker(T-\lambda_i)^2 - r_1 = r_2$ = 大于等于 2 阶的若当块个数。

$\vdots$

$$r_m = \dim \ker(T-\lambda_i)^m - r_1 - \cdots - r_{m-1}$$

Young 表计算



则 λ_i 对应的若当块

$$\mathrm{diag}\left(J_{\lambda_i, l_1} \quad \cdots \quad J_{\lambda_i, l_{r_1}}\right)$$