矩阵运算

例子:

$Ax=b$ $\quad x\in\mathbb{R}^n.\ A\in M_{m\times n}.\ b\in\mathbb{R}^m.$

$\mathbb{R}^n=M_{n\times 1}(\mathbb{R}),\quad \mathbb{R}^m\in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$

矩阵的运算

$\left\{ A \quad m\times n\ \ F\text{-矩阵}.\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn}\end{pmatrix} \right. \Bigg/ \quad a_{ij}\in\mathbb{R}\}$

$=M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 也记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

元素全部为 0 定义为 $O_{m\times n}$ $m\times n$阶矩阵

$m=n$. 称为方阵.

$M_{m\times n}$ 上的运算.

① 加法. $A=(a_{ij})_{m\times n}.\quad B=(b_{ij})_{m\times n}.$

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$

$c\in\mathbb{R}$

② 数乘 $c\cdot A=(c\,a_{ij})_{m\times n}.$

满足通常 $\mathbb{R}^{mn}$ 中加法与数乘运算规律.

额外的结构. 乘法:

已经见到过的乘法例子：

$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ 或者 $M_{n\times1}(\mathbb{R})$ $\quad A=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n\\ | & | & & |\end{pmatrix}$

$A\cdot x$ 定义为 $\quad x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_nv_n \quad v_i\in\mathbb{R}^m$

也即以 $x_1,x_2\cdots x_n$ 为系数的 A 中列向量 $v_1,v_2\cdots v_n$ 的<u>线性组合.</u> linear combination.

回顾线性组合的定义：

定义：$v_1,v_2\cdots v_n\in\mathbb{R}^m$. $c_1,\cdots c_n\in\mathbb{R}$,
则 $c_1v_1+\cdots+c_nv_n$ 称为以 $c_1\cdots c_n$ 为系数的 $v_1,v_2\cdots v_n$ 的线性组合.

定义：$A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. $B\in M_{n\times l}(\mathbb{R})$.

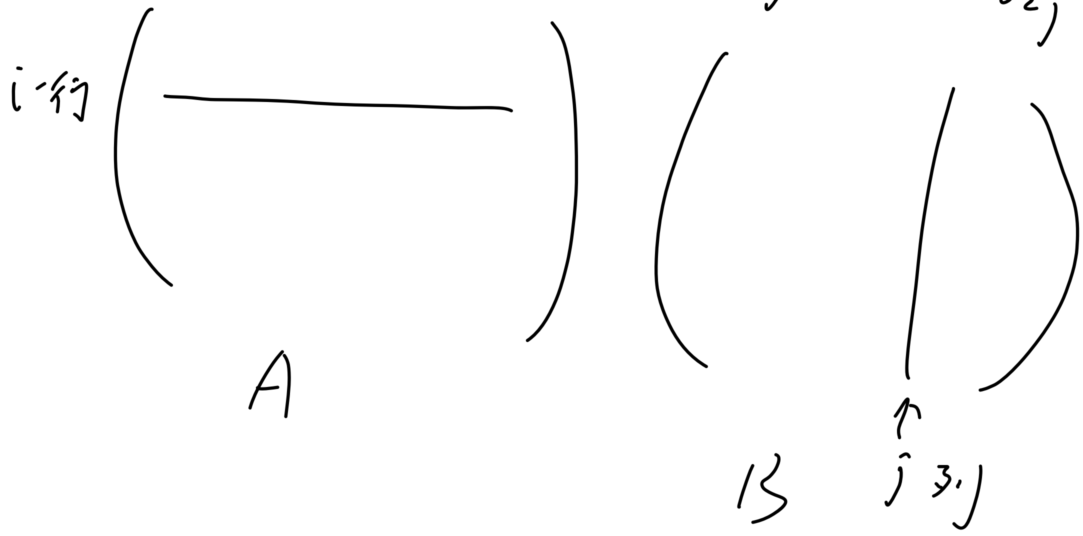
$B=\begin{pmatrix}| & | & & |\\ w_1 & w_2 & \cdots & w_l\\ | & | & & |\end{pmatrix}$, AB 定义为

$$\left(Aw_1,\ Aw_2,\ \cdots\ \middle|\ Aw_l\right)$$

或者 $A=(a_{ij})_{m\times n}$. $B=(b_{ij})_{n\times l}$

则 $AB=(c_{ij})_{m\times l}$.

其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$



写下 $A\cdot B$ 时，即需满足 A 列数 = B 行数，否则无定义。例如 $A \in M_{2\times 3}$，$B \in M_{3\times 4}$，AB 有定义，BA 无定义。

另一种观点：$B = \begin{pmatrix} - v_1 - \\ - v_2 - \\ \vdots \\ - v_n - \end{pmatrix}$ $v_i \in M_{1\times l}$ 行向量。

可验证 $[a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]\, B = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$

行向量的线性组合。

$$A = \begin{pmatrix} - w_1 - \\ - w_2 - \\ \vdots \\ - w_m - \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} w_1 B \\ w_2 B \\ \vdots \\ w_m B \end{pmatrix}$$

AB 的第 i 行是以 w_i 的元素为系数的 B 的行向量的线性组合。

结合律：$A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times l}$, $C \in M_{l\times k}$.

$$(AB)C = A(BC)$$

为什么？

证明：$C = (w_1\ w_2\ \cdots\ w_k)$

$$(AB)C = ((AB)w_1, (AB)w_2, \cdots (AB)w_k)$$

$$A(BC) = A(Bw_1, Bw_2, \cdots Bw_k)$$

$$= (A(Bw_1), A(Bw_2), \cdots A(Bw_k))$$

则只需验证 $k=1$ 的情形，$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} -u_1- \\ -u_2- \\ \vdots \\ -u_m- \end{pmatrix}$$ m 个行向量.

$$(AB)C = \begin{pmatrix} u_1 B \\ u_2 B \\ \vdots \\ u_m B \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} (u_1 B)C \\ (u_2 B)C \\ \vdots \\ (u_m B)C \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} u_1(BC) \\ \vdots \\ u_m(BC) \end{pmatrix}$$

5. 只需验证 $m=1$. $A=(a_1 \cdots a_n)$ $B=(b_{ij})$, $C=\begin{pmatrix}c\\ \vdots\\ c_l\end{pmatrix}$

$$\left((a_1 \cdots a_n) \cdot B\right)\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_l\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_{ij}\right) c_j$$

$$(a_1 \cdots a_n)\cdot\left(B\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_l\end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(\sum_{j=1}^{l} b_{ij} c_j\right)$$

$$= \sum_{i,j}(a_i b_{ij} c_j)$$

对B作行组合和列组合两种操作是交换的.

乘法与加法、数乘之间的运算规律

- $(A+B)\cdot C = AC+BC$
- $A(B+C) = AB+AC$
- $c(AB) = (cA)\cdot B = A\cdot(c\cdot B)$

乘法与行变换的关系：

基础行变换之后，每一行仍然是原来的行的线性组合，(⇒ 所有行变换之后都是)

每一行的线性组合系数拿出来作为矩阵，左乘

例如 (E3) $\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix}$ 变成 $\begin{matrix} r_1+2r_3 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix}$

则 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$ 是对 A 作 (E3) 操作的结果.

基础行变换会有以下几种矩阵表达

(E1):

$$
\begin{array}{rc}
 & \qquad\qquad\qquad \text{j列} \\
\begin{array}{r} \\ \text{i行}\rightarrow \\ \\ \text{j行}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & & \\
 & & 0 & & 1 & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & 1 & & 0 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix} \\
 & \uparrow \\
 & \text{i行}
\end{array}
$$

交换 i,j

(E2)

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & & c & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

$c \neq 0$

i行乘以c.

(E3):

$$
\begin{array}{rc}
\begin{array}{r} \\ \text{i行}\rightarrow \\ \\ \text{j行}\rightarrow \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
 & 1 & & a & \\
 & & \ddots & & \\
 & & & 1 & \\
 & & & & \ddots \\
 & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

第j行乘以a加到第i行

以上定义为初等矩阵.

性质：对 $A\in M_{m\times n}$ 作基础行变换 O 等价于左乘相应的初等矩阵 B

推论：对 A 作行变换 $O_1 \cdots O_k$，等价于左乘初等矩阵的乘积 $B_k \cdots B_2 B_1$

基础行变换是可逆的，例如：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & -a & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}}_{B_2}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & a & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}}_{B_1} A = A$$

或者 $(B_2 B_1) A = A$.

有矩阵 I_m，使得 $I_m \cdot A = A$ 成立.

I_m 第 i 行的系数为 $(0, 0, \cdots 1, 0 \cdots 0)$

$\uparrow$ i 列

考虑单位元. $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$

$A \in M_{m\times n}$, 则 $A \cdot I_n = A$.

$I_m A = A$.

考虑乘法逆元

定义: $A \in M_{n\times n}$,

若有 ① B, 使得 $BA = I_n$, 称 B 为 A 的左逆

② C, 使得 $AC = I_n$, 称 C 为 A 的右逆

③ 若左逆, 右逆均存在, 称为 A 可逆.

定理: 以下等价. ⓪ A 可逆.

① A 存在左逆. ✓

② A 存在右逆. ✓

③ $\mathrm{rref}(A) = I_n$

④ $Ax = b$ 有唯一解

⑤ $Ax = 0$ 有唯一解.

⑥ # of pivots in rref $= n$

⑦ A 是初等矩阵的乘积.

上次 ④ $\Leftrightarrow$ ⑤ $\Leftrightarrow$ ⑥. ③ $\Leftrightarrow$ ⑥ 由于每行每列均有pivot. 只能是在对角. (严格位置关系)

① ⇒ ⑤.　$Ax=0$, 则 $(BA)x=0$

$\Rightarrow x=0$.

④ ⇒ ②.　$AC=I$. $\Leftrightarrow A\cdot(w_1, w_2 \cdots w_n)=I$.

即 $Aw_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$, $Aw_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ ...

② ⇒ ①.　$AC=I$. $\Rightarrow (CA)C=C$

而另一方面 C 存在左逆, 所以 C 存在右逆 D.

$$(CA)(CD^{-1})=C\cdot D^{-1} \Rightarrow CA=I.$$

同时, 这也证明了A的左逆 C 同时也是 A 的右逆.

定理: 若 A 可逆, 则 左逆, 右逆 均唯一且相同. (定义为 A 的逆, 记作 A^{-1})

证明:　$B_1A=B_2A=I$.

则 $B_1(AC)=B_2(AC)=C$

已知逆可求解方程　$Ax=b$.　$x=A^{-1}b$

此定理的推论.

①求逆的方法.

以上定理的证明过程中:

已有 $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots$

$\underbrace{\hphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \cdots}}_{b\text{ 取以上列向量}}$

可同时作 (A, b) rref 来求解.

$$\mathrm{rref}(A, I) \Rightarrow (I, A^{-1})$$

例子: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

或者另一个观点，$[A, I]$ 作行变换相当于左乘 $B_m \cdots B_3 B_2 B_1 = B$. A $n\times n$, B $n\times n$.

$B\cdot[A, I]$ 可验证是等于 $[BA, BI]$

则行变换将 A 变成 $rref = I_n$ 时，

$BA = I_n$. $\Rightarrow$ $B = A^{-1}$.

$\Rightarrow$ $B\cdot[A_1, A_2]$. $A_1, A_2, B \in M_{n\times n}$.

$$B\cdot[v_1, v_2, \cdots v_n, w_1 \cdots w_n] = [Bv_1, Bv_2, \cdots Bv_n, Bw_1 \cdots Bw_n]$$
$$= [BA_1, BA_2]$$

矩阵乘法常以分块形式出现

这一观点也推出如下常用结论：

对 $A_{m\times n}$ 作行变换时，同时对 I_m 作，可记录下左乘的 B

例如: $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ & 1 & d & e \\ & & 1 & f \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

若, $BA = \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ & 1 & d & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ 则 $B = \begin{bmatrix} 1 & -c & ce & -cfe \\ & 1 & -e & fe \\ & & 1 & -f \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & b & c & 1 & & & \\ & 1 & d & e & & 1 & & \\ & & 1 & f & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & b & c & 1 & & & \\ & 1 & d & e & & 1 & & \\ & & 1 & 0 & & & 1 & -f \\ & & & 1 & & & & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & b & 0 & 1 & -c & ce & -cfe \\ & 1 & d & 0 & & 1 & -e & fe \\ & & 1 & 0 & & & 1 & -f \\ & & & 1 & & & & 1 \end{array}\right]$$

② 推论: $A \in M_{n\times n}$ 可逆, 当且仅当 A 是 n 阶初等矩阵的乘积.

证明: $(B_m \cdots\cdots B_1)A = I$.

B_i 初等矩阵. $\quad A = (B_m \cdots B_1)^{-1}$

B_i^{-1} 也是. $\quad = B_1^{-1} B_2^{-1} \cdots B_m^{-1}$

(对可逆矩阵证明某些结论, 可约化到初等矩阵)

矩阵的转置: $A \in M_{m\times n}$. $A^T \in M_{n\times m}$

$A = (a_{ij})$ $\quad A^T = (b_{ij})$. 则 $b_{ij} = a_{ji}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x^T = (x_1 \cdots x_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_m \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^T = A. \qquad (AB)^T = (B^T A^T)$$

定理: 对 $A \in M_{m\times n}$ 作列变换等价于右乘可逆矩阵 $B \in M_{n\times n}$.

证明: 基础列变换也对应于右乘初等矩阵.
(初等)

例如

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} i\text{列} & j\text{列} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & a & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

第j行×a加到i行.

第i列×a加到j列.

求逆.

$A \in M_{n\times n}$ $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$ 作列变换 $\longrightarrow \begin{pmatrix} I \\ A^{-1} \end{pmatrix}$

$A \in M_{m\times n}$. 对 I_n 同时作列变换, 得到右乘的 B.

# of pivots in rref(A) = 行秩 = $rk(A)$
# of pivots in rref(A^T) = 列秩 = $rk(A^T)$

定理：$rk(A) = rk(A^T)$（或者 列变换不改变行秩）

证明：A $m\times n$，B $n\times n$ 可逆。

# of pivots in rref$(A) = k$
# of pivots in rref$(AB) = l$
假设 $l > k$.

（想法 free unknows = 0，只有零解。
另一方面 方程个数 < 未知数个数，则齐次方程有非零解）

考虑方程 $Ax=0$，则有主元 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$.
自由元 $x_{j_1} \cdots x_{j_{n-k}}$

$$Ax=0 \iff \begin{cases} x_{i_1} = \text{linear combination of } x_{j_1}, \cdots x_{j_{n-k}} \\ x_{i_2} = \\ \vdots \\ x_{i_k} = \end{cases} \quad (*_1)$$

考虑方程 $(AB)y=0$. 则与 $Ax=0$ 的解有一一对应

$x = By$. $\boxed{y = B^{-1}x \quad (*_2)}$

$(AB)y=0$ 有自由元 $y_{a_1}, \cdots y_{a_{n-l}}$

将 $(*_1)$ 代入 $(*_2)$，则

$$(*_3)\quad \begin{cases} y_{a_1} = \text{linear combination of} \\ \vdots \qquad\qquad x_{j_1} \dots x_{j_{n-k}}. \\ y_{a_{n-l}} \end{cases}$$

取 $(*_3)$ 左边 $=0$，有关于 $x_{j_1} \dots x_{j_{n-k}}$ 的非零解.

将此解代入 $(*_1)$，得到 $Ax=0$ 的非零解. $x \neq 0$

另一方面 此解代入 $y = B^{-1}x$. 则为

$(A\ B)y=0$ 的解. 且此时 y 满足 $y_{a_1}=0$,

$\dots\ y_{a_{n-l}}=0$，因此 $y=0$（因为 $y_{a_1} \dots y_{a_{n-l}}$ 是自由元）

这与 $x=By$ 矛盾.

因此 $l \le k$，同理 $k \le l \Rightarrow k=l$.

推论：

主定理：行秩 = 列秩.（定义秩 = 行秩 = 列秩）

证明：只需对 rref 证明

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

作列变换到如下形式

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$，则 A 与 A^T 均为 rref.

$\Rightarrow$ # of pivots in A = # of pivots in A^T.

新定义: $\text{rank}(A)$ ($\text{rk}(A)$) = 行秩或列秩

重要的东西讲两遍,

定理 (Rouché-Capelli) $Ax=b$ 有解当且仅当 $\text{rk}(A)=\text{rk}(A,b)$

定义: 相抵标准型, $A \in M_{m\times n}$, 存在 $P \in M_{m\times m}$, $Q \in M_{n\times n}$

P, Q 可逆, 使得 $PAQ = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$

称 $\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$ 为相抵标准型. (Smith canonical form)

定义: 若存在 P, Q, 使得 $PAQ=B$, 则称 A 与 B 相抵. (equivalent)

$P \in M_{m\times m}$, $Q \in M_{n\times n}$.

定理: $\text{rk}(A)=r$, $\Leftrightarrow$ A 相抵于 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

推论: $A, B \in M_{m\times n}$ 相抵, 当且仅当 $\text{rk}(A)=\text{rk}(B)$

分块矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

可写作分块矩阵

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)$$

A_{11} A_{12} A_{21} A_{22}

四块

2×2 2×1

1×2 1×1

$$\left(\begin{array}{c|c} 1\times 2 & 1\times 1 \\ \hline 2\times 2 & 2\times 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} 1\times 2 & 1\times 1 \\ \hline 1\times 2 & 1\times 1 \\ \hline 1\times 2 & 1\times 1 \end{array}\right)$$

六块

加法：$A = (A_{ij})_{r\times s}$ $B = (B_{ij})_{r\times s}$

A、B 中 A_{ij} 与 B_{ij} 同型.

则 $A+B = (A_{ij}+B_{ij})$

数乘: $cA = (cA_{ij})_{r\times s}$

乘法: $A = (A_{ij})_{r\times s} \in M_{m\times n}$

$B = (B_{ij})_{s\times t} \in M_{n\times l}$.

且 A 的列划分与 B 的行划分相同

则 $AB = (C_{ij})_{r\times t}$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{s} A_{ik} B_{kj}$$ 保证乘法可进行.

证明: 可约化到 $l=1$ 或 $m=1$ 的情形.

可便于计算: 例如准对角阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}$$ A_i 是方阵.

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_n \end{pmatrix}$$

B_i 阶 $=A_i$ 阶

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_nB_n \end{pmatrix}$$

求逆 $A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_n^{-1} \end{bmatrix}$

准上三角矩阵求逆.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A_1 & * & * \\ \hline 0 & A_2 & *_3 \\ \hline 0 & 0 & A_3 \end{array}\right]$$

A_i 方阵, 形如这样分块的矩阵称为准上三角阵.

性质:

$M=\left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$ 可逆当且仅当 A, B 均可逆.

$(rk(M)\geq rk(A)+rk(B))$

且逆为 $\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & * \\ \hline 0 & B^{-1} \end{array}\right]$ 准上三角.

证明: 对 A, B 作行列变换 作用于 M 上

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} I_{r_1} & \\ & 0 \end{matrix} & * \\ \hline & \begin{matrix} I_{r_2} & \\ & 0 \end{matrix} \end{array}\right]$$

M 行满秩 $\Rightarrow$ B 行满秩

M 列满秩 $\Rightarrow$ A 列满秩

$\Rightarrow$ M 可逆 $\Rightarrow$ A, B 可逆.

A, B 均可逆 $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} A & C & I_1 & \\ & B & & I_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_1 & A^{-1}C & A^{-1} & 0 \\ & B & 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} I_1 & A^{-1}C & A^{-1} \\ & I_2 & B^{-1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_1 & 0 & A^{-1} - A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & I_2 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ & B^{-1} \end{bmatrix}$$

分块矩阵. 左逆 = 右逆.

例: A, B, C, D. n阶方阵, 且

$\underline{A^TC = C^TA}$, $\underline{A^TD - C^TB = I}$ $\Rightarrow$ $D^TA - B^TC = I$

$B^TD = D^TB$

则 $AB^T = B^TA$. $CD^T = D^TC$.

$AD^T - BC^T = I$.

证明:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ -A & -B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^TC - C^TA & A^TD - C^TB \\ B^TC - D^TA & B^TD - D^TB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D & -C \\ -B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} D & -C \\ -B & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $DA^T - CB^T = I$. $DC^T = CD^T$

$BA^T = AB^T$.

$\square$

分块行变换，列变换.（分块化零）（张贤科，许甫华 例4.9）

$M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$， $A\in M_{r\times r}$ $D\in M_{(n-r)\times(n-r)}$

将 M 化为准三角形（$B=0$ 或 $C=0$）

(a). A可逆， $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$

(b).(c).(d) 类似，

证明：对 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 作列变换，第一分列右乘 $-A^{-1}B$ 加到第二分列

有 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$

（注意不是 $-BA^{-1}$ 列变换先右乘 A^{-1} 然后右乘 $-B$，所以是 $-A^{-1}B$）

尝试消去 B 用行变换（D可逆），消去 C 用行或列变换

不同的变换过程得到相同的结果，有一些非平凡的等式. $\alpha, \beta \in M_{n\times 1}$

例如: $\begin{bmatrix} I & \alpha \\ \beta^T & 1 \end{bmatrix}^{-1}$, $\begin{pmatrix} I & \alpha & I & 0 \\ \beta^T & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} I & \alpha & I & \\ 0 & 1-\beta^T\alpha & -\beta^T & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I & \alpha & I & \\ 0 & 1 & -(1-\beta^T\alpha)^{-1}\beta^T & (1-\beta^T\alpha)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I & 0 & I+\alpha((1-\beta^T\alpha)^{-1}\beta^T) & -(1-\beta^T\alpha)^{-1}\alpha \\ 0 & 1 & -(1-\beta^T\alpha)^{-1}\beta^T & (1-\beta^T\alpha)^{-1} \end{pmatrix}$$

另一方面

$$\begin{pmatrix} I & \alpha & I & \\ \beta^T & 1 & & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} I-\alpha\beta^T & 0 & I & -\alpha \\ \beta^T & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc} I, & 0, & (I-\alpha\beta^T)^{-1}, & -(I-\alpha\beta^T)^{-1}\alpha \\ \beta^T & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc} I & 0 & (I-\alpha\beta^T)^{-1}, & -(I-\alpha\beta^T)^{-1}\alpha \\ 0 & 1, & -\beta^T(I-\alpha\beta^T)^{-1}, & 1-\beta^T(I-\alpha\beta^T)^{-1}\alpha \end{array}\right)$$

$$(I-\alpha\beta^T)^{-1} = I + \underbrace{(1-\beta^T\alpha)^{-1}}_{\text{求 scalar 的逆即可}}\alpha\beta^T$$

$$1-\beta^T(I-\alpha\beta^T)^{-1}\alpha = (1-\beta^T\alpha)^{-1}$$

(另一个证明：$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots$

思考：当 $\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha\beta^T)^n$ 不收敛时如何处理.)

分块矩阵与秩.

例: $\mathrm{rk}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \geq \mathrm{rk}(A)+\mathrm{rk}(B)$

$$\to \left[\begin{array}{c|c} I_{r_1} \quad 0 & * \\ \hline & I_{r_2} \quad 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c|c|c} I_{r_1} & & & \\ \hline & I_{r_2} & & \\ \hline & & * & \\ \end{array}\right]$$

(Frobenius rk 不等式)

$$\mathrm{rk}(AB)+\mathrm{rk}(BC) \leq \mathrm{rk}(ABC)+\mathrm{rk}(B)$$

证明:

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -ABC \\ B & BC \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & ABC \\ B & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ABC & \\ & B \end{pmatrix}$$

类似技巧： $A^2=I, \iff rk(A+I)+rk(A-I)=n$

$A\in M_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} I+A & \\ & I-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I+A & I+A \\ & I-A \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I+A & 2I \\ & I-A \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} I+A & 2I. \\ \frac{1}{2}(A^2-I) & 0. \end{pmatrix}$$

或有 $f(x).\ g(x)$ 互素多项式. $f(A)g(A)=0$

$\iff rk(f(A))+rk(g(A))=n.$