网页搜索排名.

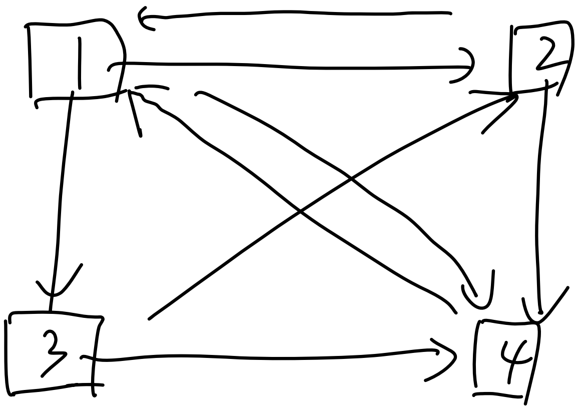
问题：对网页搜索结果进行排序

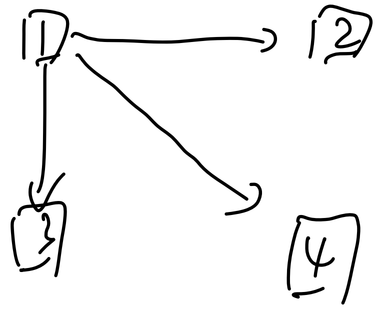
PageRank (Google的最早算法 90's, Larry Page 和 Serge Brin).

恰好双关　父亲是数学家.

从网页连接计算重要性

模型：1. 2. 3. 4 四处网址. 相互超链接情况如下.





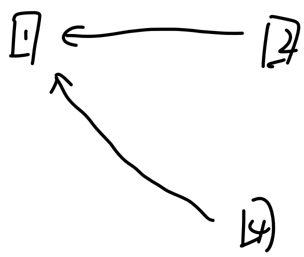
x_1, 1号网页的重要度(流量)

x_2, 2号网页的重要度

x_3

x_4

x_1 的重要度(流量) 分成三份 分别给了 2. 3. 4



类似的.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4, & x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_3, & \frac{1}{3}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_3 = \frac{1}{3}x_1 & \frac{1}{3}x_1 - x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3, & \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

消元法求解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{9} \\ 1 \end{pmatrix}$　t 为任意实数.

$t=1 \Rightarrow x_2 > x_4 > x_1 > x_3$

对一般的网络连接方式，是否一定有非零解，解是否都形如 $t(\ )$，（各分量是否同号，如何求解效率最高）

目标：求解线性方程组，了解解的结构.

一. 在什么集合（空间）内求解？

二. 什么是线性方程？

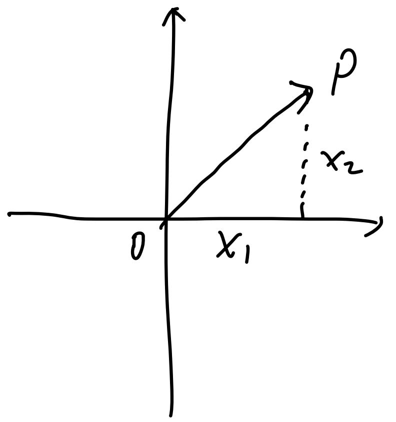
三. 如何求解？

一. 例子：　　$\mathbb{R}$ 实数的集合.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$　x_i 都是实数. $x_i \in \mathbb{R}$.
长度为 4 的实数组.

长度为 2 的实数组 $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

一一对应于平面上的点，记作 $\mathbb{R}^2$.



P —— 对应于从原点 O 到 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$

$\mathbb{R}^3$ 对应三维空间中的点

定义:(列向量空间)

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

(或者 $n \times 1$ 的矩阵的集合.)

定义(加法和数乘)

1. 加法(addition)

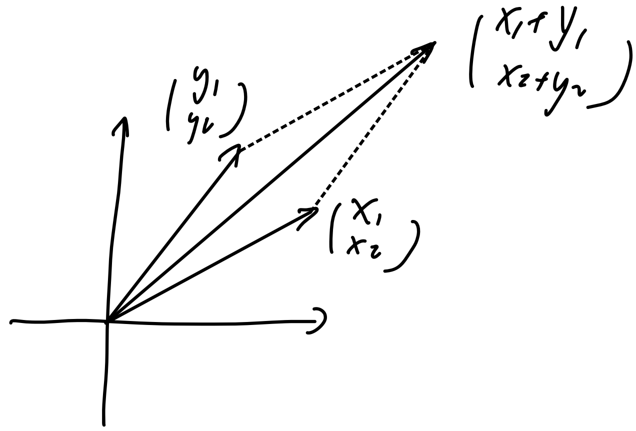
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

2. 数乘(scalar product) $c \in \mathbb{R}$ 数.

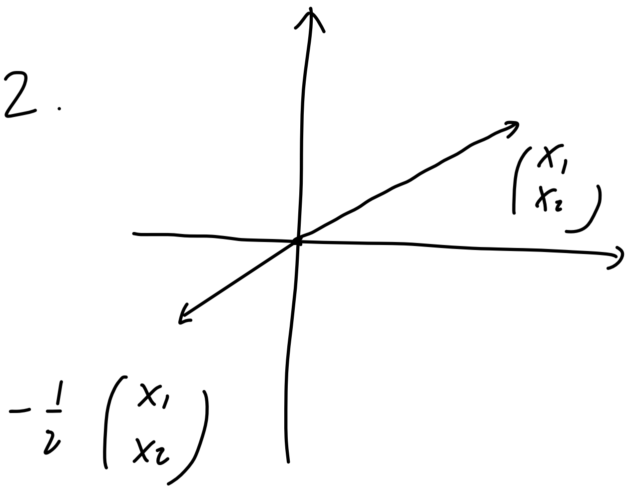
$$c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}$$

几何意义

1.



2.



二. 什么是线性方程

线性函数 = 某个值

例子中 $\underline{x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_4} = \underline{0}$

什么是线性函数

对 $\mathbb{R}^n$ 上的函数: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\mapsto F(x)$$

如果存在 $a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}, \cdots a_n \in \mathbb{R}$ 是常数（不随 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 变化）

使得 F 可有如下表达式

$$F(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

例子：$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1+1)^2 - (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - (x_2+1)^2$

不是线性函数的例子

$$F_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 + x_2 + 2, \quad F_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2$$

为什么不是：

定理：函数 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是线性函数

当且仅当 F 满足

① 对任意 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$.

$$F(x+y) = F(x) + F(y)$$

② 对任意 $c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$.

$$F(cx) = cF(x).$$

证明："$\Leftarrow$" 当 F 满足 ①. ② 时

记 $a_1 := F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad a_2 := F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdots$

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = F\left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) \overset{②}{=} x_1 \cdot F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= a_1 x_1$$

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = a_2 \cdot x_2 \quad \cdots$$

$① \Rightarrow \quad \forall X_1, X_2, \cdots X_m \in \mathbb{R}^n$

$$F(X_1 + X_2 + \cdots + X_m) = F((X_1 + X_2 \cdots + X_{m-1}) + X_m)$$

$$= F(X_1 + X_2 + \cdots + X_{m-1}) + F(X_m)$$

$$= F(X_1 + X_2 + \cdots X_{m-2}) + F(X_{m-1}) + F(X_m)$$

$$= F(X_1) + \cdots + F(X_m)$$

所以有 $F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix}\right)$

$$= F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \cdots + F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= a_1 x + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

"$\Leftarrow$" 仅当 F 是线性函数

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

代入验证 ①. ②.

小性质：F 是线性函数，则 $F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$,

证明：代入 $\sum a_i x_i = 0$.

或者：

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = F\left(2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$F_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 + x_2 + 4$ 不是线性函数

$F_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq 0$

$$F_2\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = x_1^2+x_2^2$$

$$F_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = 1.$$

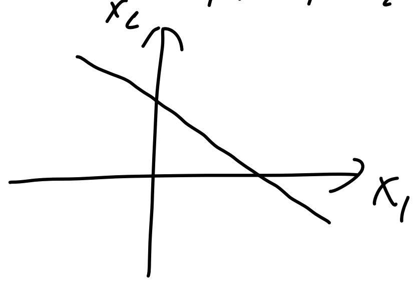
$$F_2\left(2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = 4 \neq 2\,F_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

(线性方程组) $\mathbb{R}^n$ 上的 m 个线性函数 $F_1 \cdots F_m$ 和 m 个实数 $b_1, b_2 \cdots b_m$

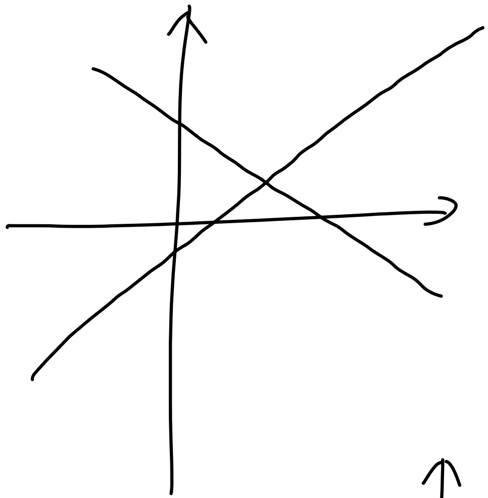
方程组
$$\begin{cases} F_1(x) = b_1 \\ F_2(x) = b_2 \\ \quad\vdots \\ F_m(x) = b_m. \end{cases}$$

称作 n 个变元的线性方程组.

几何解释: $\mathbb{R}^2$. $a_1x_1 + a_2x_2 = b$,



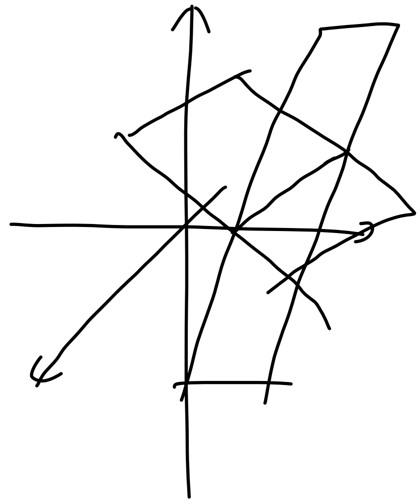
若 $a_1 \neq 0$ 或 $a_2 \neq 0$



$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

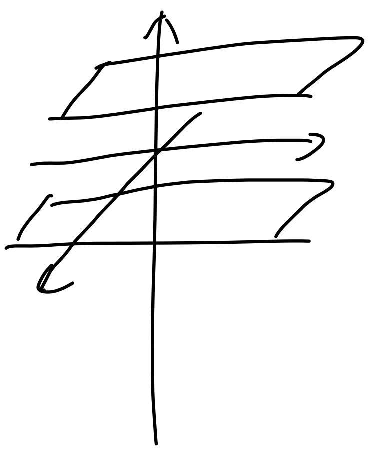
若 $\dfrac{a_{11}}{a_{12}} \neq \dfrac{a_{21}}{a_{22}}$, $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$

$\mathbb{R}^3$ 中



2个方程 三个未知数

← 无穷组解. 形成一条"直线".



← 无解.

三. 高斯消元法.

$$\begin{array}{l} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array}\begin{cases} 4x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{交换 } r_1, r_2} \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 4x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \end{array}$$

解集保持不变.

解集保持不变, 因为可以由 R_1, R_2, R_3 恢复出 r_1, r_2, r_3

$$\xrightarrow[\substack{r_2 \to R_2 \\ r_1 \to R_3}]{r_3 - 2r_1 \to R_1} \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 4x_2 - x_3 = 7 \\ -4x_2 + x_3 = -7 \end{array}$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2 \to R_3} \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 5. \\ 4x_2 - x_3 = 7 \\ 0 = 0 \end{array}$$

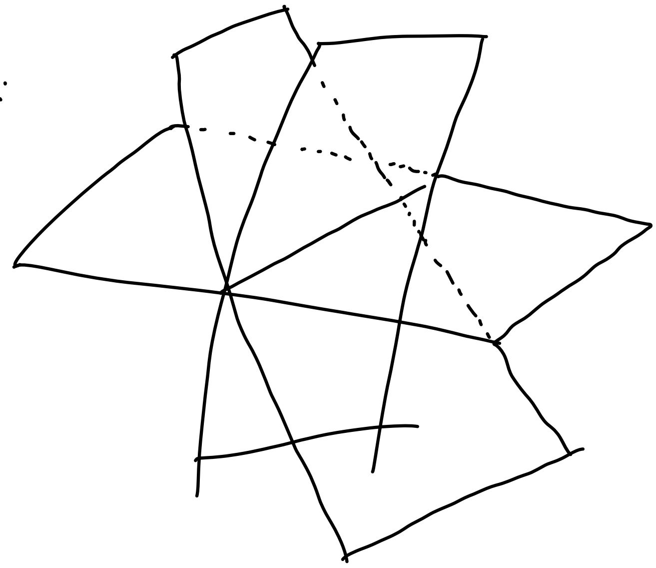
$$x_2 = \frac{1}{4}(x_3 + 7) = \frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{4}$$

$$x_1 = 5 - 2x_2 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}$$

x_3 可取任一实数.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{4} \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

几何图形:



基础行变换: n个变元的线性方程组仍变为线性方程组.

三种: (E1) 交换行

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_m \end{array} \qquad \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_m \end{array}$$

(E2) 某一行乘以非零常数 c $\qquad c_i \neq 0$

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_m \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ c\,r_i \\ \vdots \\ r_m \end{array}$$

(E3) 将 i 行的 c 倍加到另一行上.

$$\begin{array}{ccc} r_1 & \longrightarrow & r_1 \\ r_2 & & r_2 \\ \vdots & & \vdots \\ r_i & \longrightarrow & r_i \\ \vdots & & \vdots \\ r_j & \longrightarrow & r_j + c r_i \\ & & \vdots \\ r_m & \longrightarrow & r_m \end{array}$$

性质：基础行变换均可逆，且逆为基础行变换.

定义（行变换）有限个基础行变换的复合.

例子：

$$\begin{array}{ccc} r_1 & \longrightarrow & r_2 \\ r_2 & \longrightarrow & r_3 \\ r_3 & \longrightarrow & r_1 \end{array}$$

分解为

$$\begin{array}{ccccc} r_1 & \longrightarrow & r_2 & \longrightarrow & r_2 \\ r_2 & \longrightarrow & r_1 & \longrightarrow & r_3 \\ r_3 & \longrightarrow & r_3 & \longrightarrow & r_1 \end{array}$$

任意排列 m 行是行变换.（且均为 $E1$ 的复合）

性质：行变换均可逆，且逆为行变换.

证明：操作 $O1$ 和 $O2$. $(O1 \cdot O2)^{-1} = (O2)^{-1}(O1)^{-1}$

推论：行变换不改变线性方程组的解集

问题：行变换到什么形式可以写下解集的某种表达.
（是否可以找到某种标准表达，方便比较解集）

作行变换只关注系数，将系数提取出来

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$，常数项 $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

增广矩阵 $(A\ b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

(augmented matrix)

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则原线性方程组记作 $Ax=b$

线性方程组的行变换同样定义矩阵的行变换.

行变换的目标：对增广矩阵 $(A\ b)$ 而言.

① 所有非零行在零行的上面.

② 对某一非零行，称最左边的非零元为主元
(leading coefficient or pivot)
第 i 行的主元严格比第 $i+1$ 行的靠左.

定义（行阶梯型 row echlon form）

矩阵满足条件①，②

定义（最简行阶梯型 reduced row echlon form）rref

矩阵满足条件①，②，且主元所在列其他元素均为0，主元本身为1.

定理：矩阵A可通过行变换变成 rref，且该 rref 只依赖于A，不依赖于行变换的选取.（记作 rref(A)）

证明："行变换成 rref".

归纳法，对列作归纳.

$n=1$ 时 $m\times 1$ 矩阵 A $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

若 $a_{11}=a_{21}=\cdots=a_{m1}=0$，已经是 rref $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

若 $a_{11}=a_{21}=\cdots=a_{(k-1)1}=0$，$a_{k1}\neq 0$.

则 (E1) 将 a_{k1} 换到第一行，

(E2) 第一行乘以 $(a_{k1})^{-1}$，主元变为1.

(E3) 将第一行以下变为0.

$\text{rref} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

假设对 n 成立，对 $m\times(n+1)$ 矩阵 A.

$A=(B, y)$， B $(m\times n)$ 矩阵.

B 可由行变换得到 rref B'，将同样变换作用在 A 上

得到 $A'=(B', y')$

如果 B' 没有零行，则 A' 已经是 rref.

如果 B' 从第 $(l+1)$ 行开始是零行

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & * & * & 0 & * & 0 & & & y'_1 \\ & & & 1 & * & 0 & & & \vdots \\ & & & & & 1 & * & * & y'_l \\ \hline & & & & 0 & & & & y'_{l+1} \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & y'_m \end{array}\right) \leftarrow l \text{ 行}$$

对 $\begin{pmatrix} y'_{l+1} \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}$ 用 $n=1$ 的结论. 可作行变换得到

rref，同时对 B' 作.

由于行变换不改变零矩阵，所以不改变 B'

情形1. $\mathrm{rref}\begin{pmatrix} y'_{l+1} \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A'$ rref

情形2，$\mathrm{rref}\begin{pmatrix} y'_{l+1} \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

作(E3)将第$(l+1)$行加到第$1, 2, \cdots l$行，将$y'_1, \cdots y'_l$变为0，(消去$y_1, \cdots y_l$)

也不改变B'，$\Rightarrow$ 此时A'是rref.

只依赖于A.（之后）

由rref写出所有解.

定义：对线性方程组的系数矩阵A，记rref(A)中pivots对应的未知元为主元（prinipal unknowns）.其余未知元为自由元（free unknowns）

例如：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

$x_1 \quad x_2 \quad\quad x_5$

$x_1\ x_2\ x_5$是主元，x_3, x_4, x_6是自由元

$b_4\neq 0$ 或者 $b_5\neq 0$ $\Rightarrow$ 方程组 $Ax=b$ 无解.

$b_4=0$ 且 $b_5=0$，则 x_3, x_4, x_6 取定任意实数时.
主元由方程组唯一确定

$$x_1 = b_1 - 3x_3 - 5x_4 - x_6,$$
$$x_2 = b_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_6$$
$$x_5 = b_3$$

且此时数组 $(x_1 \cdots x_6)$ 满足原方程.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \cdot \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

定理：对于方程 $Ax=b$. 用行变换将 (A, b)

转化为 rref. $(\bar{A}, \bar{b})$，则

方程有解 $\Leftrightarrow$ 没有方程 $0=\bar{b}_k$，且 $\bar{b}_k\neq 0$.

方程有解时，自由元可任意取值. 且自由元的每一组取值唯一决定了一组解.

解的结构

定义： $Ax=0$ 称为齐次线性方程组.

定理： $\{x \mid Ax=0\}$ 在加法和数乘下封闭.

证明： ① 由 rref 求出解的一般表达形式

$x_{k_1}, \cdots x_{k_s}$ 为自由元,

则解 $x = x_{k_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{v_1} + x_{k_2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{v_2} + \cdots$

$+ x_{k_s} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{v_s}$, $v_1, v_2, v_3 \cdots, v_s$ 是某些常向量,

$x_{k_1}, \cdots x_{k_s}$ 任取

易知加法. 数乘之后仍是此形式.

(称为 $v_1, v_2, \cdots v_s$ 的线性组合)

线性组合经过加法和数乘之后仍为线性组合.

且任一线性组合可由加法和数乘复合得到

② 根据 $A(x+y) = Ax + Ay$,

$A(c \cdot x) = c \cdot (Ax)$

非齐次 $Ax = b$,

例子中: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

$+ x_6 \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

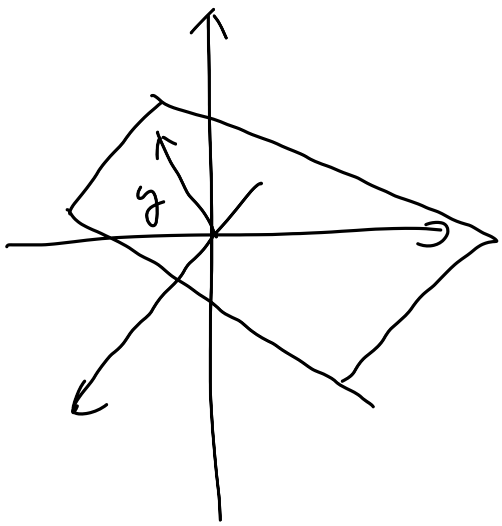
特解. $x_3 = x_4 = x_6 = 0$.

定理：$Ax=b$ 有某一解（特解）$\tilde{x}$，则 $Ax=b$ 的所有解均可唯一表达为 $x=y+\tilde{x}$，其中 y 是 $Ay=0$ 的解.

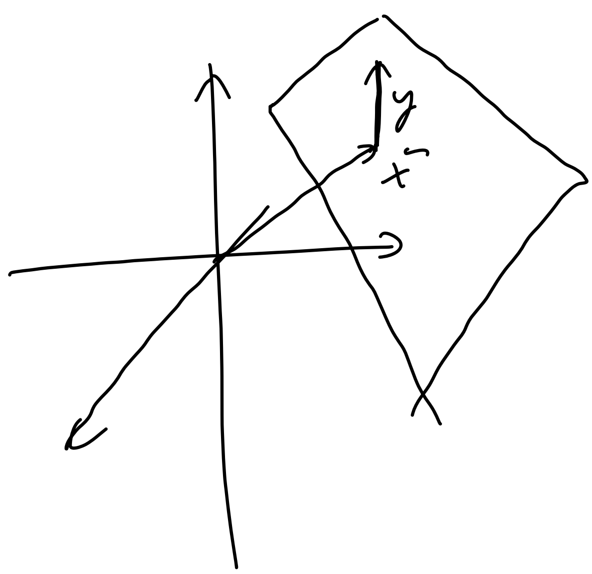
证明：① 验证 $(y+\tilde{x})$ 是解.

② 验证 x 是解时，$x=(x-\tilde{x})+\tilde{x}$，其中 $x-\tilde{x}$ 满足 $A(x-\tilde{x})=0$

几何：



$Ay=0$



$Ax=b.$

一些定义：　方程有解 $\Leftrightarrow$ 相容的 consistent
方程无解 $\Leftrightarrow$ 不相容 inconsistent
方程有唯一解 $\Leftrightarrow$ 确定的 definite

推论：① 相容的 $\Leftrightarrow$ # of pivots of rref(A) =
# of pivots of rref(A, b)

② 确定的 $\Leftrightarrow$ 相容 + # of pivots of rref(A) =
# of columns of A.

一些常用的关系：① # of pivots $\le$ # of rows in A.
② # of columns of A = # of pivots +
# of free unknowns

A $m \times n$
definite $\Rightarrow$ $m \ge n$.

或者 $n > m \Rightarrow Ax = 0$ 有无穷多组解.

定理：$m = n$ 时，$Ax = b$ 是否有唯一解只取决于 A，与 b 无关
证明：有唯一解 $\Leftrightarrow$ # of pivots $= m = n$.

例子：(Shafarevich-Remizov) Example 1.21

对 $c_1, \cdots c_r$ 互不相同的实数，$k_1, \cdots k_r$ 任意实数

存在唯一的次数 $\leq r-1$ 多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_{r-1} x^{r-1}$

使得 $f(c_1) = k_1, \quad f(c_2) = k_2, \quad f(c_r) = k_r \quad (*)$

证明：$(*)$ 是关于 $a_0, a_1, \cdots a_{r-1}$ r 个未知元的线性方程组。$A \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix}$

对于 $A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff c_1, \cdots c_r$ 是 $f(x)$ 的根

$(x-c_1)(x-c_2) \cdots (x-c_r) \mid f(x) \iff f(x) = 0$

存在唯一解 $\Rightarrow$ $(*)$ 有唯一解

类似的推导方法出现在 Example 1.22，1.23 中，用非平凡的方法推出齐次方程解的唯一性。(值得阅读)

定义：# of pivots of A 定义为 A 的秩 (rank)

$\text{rank}(A)$ 或者 $\text{rk}(A)$

rref 唯一性证明：（Mirzakhani 第一位女性 Fields medalist）

归纳法：对 n 作归纳．1998, American Math Monthly）．

(*) 行变换将零矩阵变成零矩阵，行变换可逆，
所以行变换将非零矩阵变成非零矩阵．

$n=1$，rref 只有两种 $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

由 (*) $\Rightarrow$ rref 由 A 是否为零矩阵决定．

假设对 n 成立．$A=(B\ y)$ 行变换得到
rref $A'=(B'\ y')$，或者 $A''=(B''\ y'')$

则 B', B'' 是由 B 经行变换得到，且都是 rref．
所以 $B'=B''$

考虑，线性方程组 $B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=y$．

得到等价于方程组 $B'\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=y'$

或者 $B''\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=y''$

情形 1．无解，(Inconsistent)

则 $A'=\left(\begin{array}{c|c} * & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right)=A''$

情形2. 有解. 假设主元在 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 个位置

$$
\begin{array}{cccccc}
 & i_1\text{列} & & i_2\text{列} & i_r\text{列} & \\
\end{array}
\left(\begin{array}{cccccc|c}
0 & \boxed{1} & * & * & & & y_1' \\
 & 0 & & \boxed{1} & & & y_2' \\
 & \vdots & & & & & \vdots \\
 & & & & \boxed{1} & & y_r' \\
 & 0 & & & & & 0 \\
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & 0
\end{array}\right)
\quad \text{或者} \quad
\begin{array}{ccc}
i_1\text{列} & i_2\text{列} & i_r\text{列}
\end{array}
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & \boxed{1} & * & * & & & y_1'' \\
 & & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & & y_2'' \\
 & & \vdots & & & & & \vdots \\
 & & & & & & \boxed{1} & y_r'' \\
 & & 0 & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

(等价于去掉自由元所在的列)

令自由元均取0, 则得到关于 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}$ r个未知元的线性方程组, 有唯一解.

$x_{i_1}=y_1'$, $x_{i_2}=y_2'$, $\cdots$ $x_{i_r}=y_r'$

或者 $x_{i_1}=y_1''$, $x_{i_2}=y_2''$, $\cdots$ $x_{i_r}=y_r''$

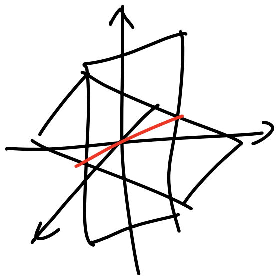
所以 $y_1'=y_1''$, $y_2'=y_2''$, $\cdots$ $y_r'=y_r''$.

解集一样是否有相同的 rref? (有解, 无解分开讨论)

(作业题, 需要详细步骤)

$\mathbb{R}^3$ 中 A 2×3, $Ax=0$

\# of pivots in $\mathrm{rref}(A) = 2$



通过原点的直线.

$\mathrm{rref}(A)$ 的可能性有如下

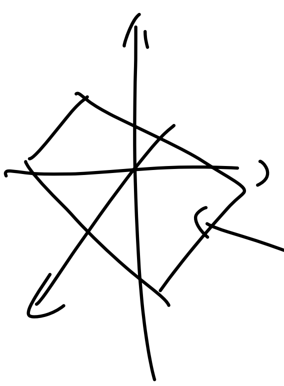
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $\mathbb{R}^3$ 中通过原点的直线的集合, 记为 $G(1,3)$

$$G(1,3) \xleftarrow{1:1\text{对应}} \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^1 \sqcup \underline{\mathbb{R}^0} \leftarrow \text{单点集.}$$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, b_1

$\mathbb{R}^3$ 中考虑 $Ax=0$. $\quad \mathrm{rk}\, A = 1$,



平面

$\mathbb{R}^3$ 中通过原点的平面的集合 $G(2,3)$

$\mathrm{rref}(A) = (1 \ a_1 \ a_2)$, $(0 \ 1 \ b)$, $(0, 0, 1)$

也 1-1 对应于 $\mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^1 \sqcup \mathbb{R}^0$

$\mathbb{R}^4$ 中 $\quad Ax=0 \quad \mathrm{rk}\, A = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 & a_2 \\ & 1 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G(2,4) \xleftrightarrow{1:1\text{对应}} \mathbb{R}^4 \sqcup \mathbb{R}^3 \sqcup \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}^0$$

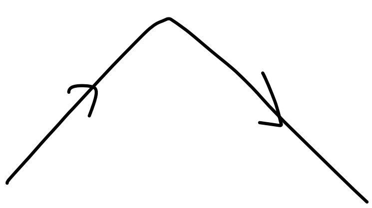
计算 $G(m,n)$ 这种分解中每一个 $\mathbb{R}^i$ 的个数 b_i

生成函数 $\sum_{i=0}^{m(n-m)} b_i t^i$ (Homework)

验证: b_i palindromic 反序对称. (✓, 可做)

(✓, 难, 我不知道初等做法) (✗, 试例2)

(单峰? log concave ?)



$$b_i^2 \geq b_{i-1} b_{i+1}$$