行列式计算若干技巧

1.（化为分块对角阵）

<u>例1</u> 计算2n阶行列式

$$\Delta_{2n}=\begin{vmatrix} a_1 & & & & & & & b_{2n} \\ & a_2 & & & & & b_{2n-1} & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a_n & b_{n+1} & & & \\ & & & b_n & a_{n+1} & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b_2 & & & & & a_{2n-1} & \\ b_1 & & & & & & & a_{2n} \end{vmatrix}$$

（将第2n行依次与第2n-1，2n-2，…，2行调换
再将第2n列依次与第2n-1，2n-2，…，2列调换）

$$\sim \Delta_{2n}=\begin{vmatrix} a_1 & b_{2n} & & & & & & \\ b_1 & a_{2n} & & & & & & \\ & & a_2 & & & & & b_{2n-1} \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a_n & b_{n+1} & & \\ & & & & b_n & a_{n+1} & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & b_2 & & & & & a_{2n-1} \end{vmatrix}$$

同理

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_{2n} & & & & & \\ b_1 & a_{2n} & & & & & \\ & & a_2 & b_{2n-1} & & & \\ & & b_2 & a_{2n-1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_n & b_{n+1} \\ & & & & & b_n & a_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_{2n} \\ b_1 & a_{2n} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_2 & b_{2n-1} \\ b_2 & a_{2n-1} \end{vmatrix}\cdot\cdots\cdot\begin{vmatrix} a_n & b_{n+1} \\ b_n & a_{n+1} \end{vmatrix}$$

2（化为三角形）、每行和一样、循环

<u>例2</u> 设 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，计算行列式

$$\Delta_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

（利用主对角元 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 依次消掉 $c_1,c_2,\cdots,c_n$）

将第i列的 $-\frac{c_{i-1}}{a_{i-1}}$ 倍加到第1列上
$(i=2,\cdots,n+1)$

$$\sim \Delta_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_kc_k}{a_k} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & a_2 & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(a_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_kc_k}{a_k}\right)\prod_{i=1}^{n}a_i$$

<u>例3</u> 计算n阶行列式：

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} k & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix}_{n\times n}$$

将第2，3，…，n列都加到第1列，再提取公因子

$n \geqslant 2$ 时

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} k+(n-1)\lambda & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ k+(n-1)\lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k+(n-1)\lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix}$$

$$= \left(k+(n-1)\lambda\right) \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 1 & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix}$$

第1行乘(-1)依次加到各行

$$= \left(k+(n-1)\lambda\right) \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 0 & k-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ & & (k-\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & (k-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= \left(k+(n-1)\lambda\right) (k-\lambda)^{n-1}$$

当 $n=1$ 时，公式也成立

例4

计算 $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$

依次将 (i) 行乘以 (-1) 加到第 $i+1$ 行

$(i=n-1, n-2, \cdots, 1)$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

将2,3,…,n列都加到第1列

$$= \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

各列均加到第1列

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & -n & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

按最后一行展开

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^n \cdot \underline{(-n)^{n-2} \cdot (-1)^{\frac{(n-3)(n-2)}{2}}}$$

$$= (-1)^{\frac{(n+1)(n-2)}{2}} \frac{(n+1)}{2} \cdot n^{n-1}$$

$$\begin{vmatrix} & & -n \\ & -n & \\ -n & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-3)(n-2)}{2}}$$

3.（递推公式） 三对角行列式、Vandermonde型行列式

例 求n阶三对角行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & & & \\ c & a & b & & & \\ 0 & c & a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}_{n\times n}$$

其中 $bc\neq 0$

将行列式按第一行展开.

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - bc\Delta_{n-2} \quad (*) \quad \Leftrightarrow \Delta_n - a\Delta_{n-1} + bc\Delta_{n-2} = 0$$

初始条件 $\Delta_1 = a$，$\Delta_2 = a^2 - bc$

想要：$\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} = \beta(\Delta_{n-1} - \alpha\Delta_{n-2})$

α,β 待定 $\Updownarrow$

$$\Delta_n - (\alpha+\beta)\Delta_{n-1} + \alpha\beta\Delta_{n-2} = 0$$

记 $(*)$ 的特征方程 $x^2 - ax + bc = 0$ 的两根为 α,β $\begin{cases}\alpha+\beta = a \\ \alpha\beta = bc\end{cases}$.

于是 $\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} = \beta(\Delta_{n-1} - \alpha\Delta_{n-2}) \quad (**)$

$$\Delta_n - \beta\Delta_{n-1} = \alpha(\Delta_{n-1} - \beta\Delta_{n-2}) \quad (***)$$

α,β 地位对等

Case 1 当 $\alpha\neq\beta$ 时（$\Leftrightarrow a^2\neq 4bc$）

记 $F_n = \Delta_n - \alpha\Delta_{n-1}$，$G_n = \Delta_n - \beta\Delta_{n-1}$ $(n\geq 2)$

则 $F_2 = \Delta_2 - \alpha\Delta_1 = a^2 - \underset{\alpha\beta}{\underset{\|}{bc}} - \alpha a = a(a-\alpha) - \alpha\beta$

$= a\beta - \alpha\beta$

$= \beta^2$

$G_2 = \Delta_2 - \beta\Delta_1 = \alpha^2$

由 $(**)$，$F_n = \beta F_{n-1}$

由 $(***)$ $G_n = \alpha G_{n-1}$

$\Rightarrow$ $F_n = \beta^n$，$G_n = \alpha^n$

即 $\begin{cases}\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} = \beta^n \\ \Delta_n - \beta\Delta_{n-1} = \alpha^n\end{cases} \Rightarrow \Delta_{n-1} = \dfrac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}$

$$\Rightarrow \Delta_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$$

Case 2 当 $\alpha = \beta$ 时（即 $a^2 = 4bc$）

$(**)$ 和 $(***)$ 均为

$$\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} = \alpha(\Delta_{n-1} - \alpha\Delta_{n-2})$$

令 $F_n = \Delta_n - \alpha\Delta_{n-1}$ $(n\geq 2)$ $\Updownarrow$ $F_n = \alpha F_{n-1}$

初始条件 $F_2 = \Delta_2 - \alpha\Delta_1 = \alpha^2$

$\Rightarrow F_n = \alpha^n$ 即 $\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} = \alpha^n = \left(\frac{a}{2}\right)^n$

$\Delta_2 = a^2 - bc = 3bc = 3\alpha^2$

$\Delta_1 = a = 2\alpha$

猜测 $\Delta_n = (n+1)\alpha^n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n$（归纳法易证） $\square$

例　求 n 阶 Vandermonde 行列式

$$\Delta_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}_{n\times n}$$

依次第 i 行乘以 $(-a_1)$ 加到 $(i+1)$ 行

$(i=n-1,n-2,\cdots,1)$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&a_2-a_1&\cdots&a_n-a_1\\0&(a_2-a_1)a_2&\cdots&(a_n-a_1)a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&(a_2-a_1)a_2^{n-2}&\cdots&(a_n-a_1)a_n^{n-2}\end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix}1&\cdots&1\\a_2&\cdots&a_n\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_2^{n-2}&\cdots&a_n^{n-2}\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$\Rightarrow\ \Delta_n=\prod_{i=2}^{n}(a_i-a_1)\,\Delta_{n-1}$$

初始 $\Delta_1=1$　$\Delta_2=a_2-a_1$

$$\Rightarrow\ \Delta_n=\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)$$

4 (Laplace 展开)　将高阶行列式化为低阶行列式

方阵A行列式按照 $i_1,i_2,\cdots,i_p$ 列的 Laplace 展开公式：

$$\det A=\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_p\leq n}A\begin{array}{l}\text{行}\\ \\ \text{列}\end{array}\!\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_p\\i_1&i_2&\cdots&i_p\end{pmatrix}\cdot(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_p+j_1+j_2+\cdots+j_p}A\begin{pmatrix}j_{p+1}&\cdots&j_n\\i_{p+1}&\cdots&i_n\end{pmatrix}$$

补标

例　计算 5 阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}-4&1&2&-2&1\\0&3&0&1&-5\\2&-3&1&-3&1\\-1&-1&3&-1&0\\0&4&0&2&5\end{vmatrix}$$

按列中 0 的较多的进行展开

将 $|A|$ 按第 1、3 列作 Laplace 展开

$$|A|=\sum_{1\leq i_1<i_2\leq 5}A\begin{pmatrix}i_1&i_2\\1&3\end{pmatrix}\left((-1)^{i_1+i_2+1+3}A\begin{pmatrix}i_3&i_4&i_5\\2&4&5\end{pmatrix}\right)$$

i_1,i_2 行在 $\{1,3,4\}$ 中选取 相应行列式 $A\begin{pmatrix}i_1&i_2\\1&3\end{pmatrix}$ 才不为 0　$(i_1,i_2)=\begin{cases}(1,3)\\(1,4)\\(3,4)\end{cases}$

$$=\begin{vmatrix}-4&2\\2&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&1&-5\\-1&-1&0\\4&2&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-4&2\\-1&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&1&5\\-3&-3&1\\4&2&5\end{vmatrix}$$

$(i_1,i_2)=(1,3)$　i_1+i_2 偶数　$(i_1,i_2)=(1,4)$　i_1+i_2 奇

$$-\begin{vmatrix}2&1\\-1&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&-2&1\\3&1&-5\\4&2&5\end{vmatrix}=-1069$$

i_1+i_2 奇　$(i_1,i_2)=(3,4)$

例

证明: $\det\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$，其中 $A_{m\times m}$ $B_{n\times n}$ 为方阵

pf 对 $\begin{vmatrix} A_{m\times m} & C \\ O & B_{n\times n} \end{vmatrix}$ 按前m列作Laplace展开即可.

例 求n阶行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & & & & & & \\ c & a & \ddots & & & & & \\ & \ddots & \ddots & b & & & & \\ & & c & a & b & & & \\ & & & 2c & 2a & 2b & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 2c & 2a & 2b \\ & & & & & & 2c & 2a \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} k\text{行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} l\text{行} \end{matrix}$$

其中 $k+l=n$，$bc\neq 0$

对Δ按前k行展开

$$\Delta = \sum_{\substack{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n \\ \text{列}}} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \left((-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+1+2+\cdots+k} A\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & n \\ i_{k+1} & i_{k+2} & \cdots & i_n \end{pmatrix} \right)$$

$i_1, i_2, \cdots, i_k$ 只能在前 $k+1$ 列中选，有序的只有两种

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & & \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & a & b \\ & & c & a \end{vmatrix}_{k\times k}}_{(i_1\, i_2 \cdots i_k)=(1\,2\cdots k)} \cdot \begin{vmatrix} 2a & 2b & & \\ 2c & 2a & \ddots & \\ & \ddots & 2a & 2b \\ & & 2c & 2a \end{vmatrix}_{l\times l} + \underbrace{(-1)^{1+2+\cdots+(k-1)+(k+1)+1+\cdots+k} \begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & \ddots & & \\ & \ddots & c & a & b \\ & & & c & a & 0 \\ & & & & c & b \end{vmatrix}}_{(i_1\, i_2 \cdots i_k)=(1\,2\cdots k-1\; k+1)} \cdot \begin{vmatrix} 2c & 2b & & & \\ 0 & 2a & 2b & & \\ & 2c & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & 2c\;\; 2a & 2b \\ & & & 2c & 2a \end{vmatrix}$$

记 $\Delta_k = \begin{vmatrix} a & b & & \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & a & b \\ & & c & a \end{vmatrix}$ k阶

$$\Rightarrow \Delta = 2^l \Delta_k \Delta_l - 2^l bc\, \Delta_{k-1} \Delta_{l-1}$$

5 (加边)

原理 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$

例 求n阶行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix} \quad \text{其中 } a_1a_2\cdots a_n\neq 0$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2-a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix} \overset{r_i+(-1)r_1}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

用主对角消掉第1列

$$= \begin{vmatrix} 1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ & -a_1 & & & \\ & & -a_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -a_n \end{vmatrix} = (-1)^n a_1a_2\cdots a_n \left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}\right)$$

6（分拆）

例
$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ 1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & 1 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$
$$=0$$

例 计算
$$|A| = \begin{vmatrix} 1+t & t & t & \cdots & t \\ t & 2+t & t & \cdots & t \\ t & t & 3+t & \cdots & t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t & t & t & \cdots & n+t \end{vmatrix}$$
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & 0 & & & \\ t & 2 & & & \\ t & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ t & & & & n \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 1 & & & & t \\ & 2 & & & t \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & n-1 & t \\ & & & & t \end{vmatrix}$$

一般地，设 $A=(a_{ij})$
$$A(t) = (a_{ij}+t)$$
那么 $$|A(t)| = |A| + t\sum_{i,j} A_{ij}$$

事实上，$A(t)$可拆成2^n个行列式的和，但两列相同，行列式为0.
因此可能不为0的行列式至多只有1列含元素t

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & t \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & t \end{vmatrix}$$
$$= |A| + \underline{tA_{11}+tA_{21}+\cdots+tA_{n1}} + \cdots + \underline{tA_{1n}+tA_{2n}+\cdots+tA_{nn}}$$

7（利用多项式的观点）

例 求n阶行列式

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

将 x 看成未定元，a_i 视为常数

Δ_n 是关于 x 的多项式 $f(x)$ 且 $\deg f(x)=n$，首1

$$\Delta_n=f(x)=\begin{vmatrix} x+a_1+\cdots+a_{n-1} & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ x+a_1+\cdots+a_{n-1} & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ x+a_1+\cdots+a_{n-1} & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ 有一根 $-(a_1+\cdots+a_{n-1})$

令 $x=a_i$ 代入 $f(x)$ 得

$$f(a_i)=\begin{vmatrix} a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_i & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_i & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_i \end{vmatrix}$$

其中第i行与i+1行相同 $\Rightarrow f(a_i)=0 \quad (1\le i\le n-1)$

$$\Rightarrow \Delta_n=f(x)=(x+a_1+\cdots+a_{n-1})(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})$$

例 求n阶行列式

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ & \cdots & & \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_n^{k-1} \\ x_1^{k+1} & x_2^{k+1} & \cdots & x_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_n^{n} \end{vmatrix}$$

构造新行列式（n+1阶 Vandermonde 行列式）

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ & \cdots & & & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_n^{k-1} & x^{k-1} \\ x_1^{k} & x_2^{k} & \cdots & x_n^{k} & x^{k} \\ x_1^{k+1} & x_2^{k+1} & \cdots & x_n^{k+1} & x^{k+1} \\ & \cdots & & & \vdots \\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_n^{n} & x^{n} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i) \quad (*)$$

把 x 看作未定元，Δ 是 x 的多项式　　（相差符号 $(-1)^{k+\cdots}$）

对 Δ 按第n+1行作 Laplace展开，Δ_n 是多项式 Δ 的 k 次项系数

由(*)，Δ 的 k 次项系数为

$$\prod_{i<j}(x_j-x_i)\left[(-1)^{n-k}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{n-k}} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n-k}}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta_n=\prod_{j>i}(x_j-x_i)\left(\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_{n-k}} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n-k}}\right)$$

1. $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank} B$

A, B 为方阵

2. Frobenius 秩不等式

$$\operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) \leq \operatorname{rank}(ABC) + \operatorname{rank}(B)$$

3. $AB = BA = O$, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^2)$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$

4. $A_1, \cdots, A_k \in M_{n\times n}(F)$ 满足 $A_1 + \cdots + A_k = I_n$

TFAE

① $A_1, \cdots, A_k$ 均为幂等阵

② $\operatorname{rank}(A_1) + \cdots + \operatorname{rank}(A_k) = n$

③ $A_i A_j = A_j A_i = 0 \ (i \neq j)$ 时

5 $A, B \in M_{n\times n}(F)$ 满足 $AB = BA$.

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \geq \operatorname{rank}(A+B) + \operatorname{rank}(AB)$

6. $A\in M_{n\times n}(F)$ A幂零 $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{tr}A^k=0$

$\forall\ 1\le k\le n$.

8. 伴随阵 A^* 可表示为A的多项式

(更一般的，与A可交换的方阵也可表示为A的多项式

7. $A,B\in M_{n\times n}$ $C=AB-BA$,

如果 $AC=CA$，那么C为幂零阵.

9 $AB=0$ $A\in M_{m\times n}(F)$，$B\in M_{n\times k}(\mathbb{R})$

$\Longrightarrow$ $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B\le n$

10 $A\in M_{m\times n}$ $B\in M_{n\times k}$

$\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B-n\le\operatorname{rank}AB\le\min\{\operatorname{rank}A,\operatorname{rank}B\}$

11 满秩分解

$A\in M_{m\times n}$ 那么 $\operatorname{rank}(A)=r \Longleftrightarrow$ $\exists$秩为r的 $m\times r$ 矩阵B

和秩为r的 $r\times n$ 矩阵C

s.t. $A=BC$

例 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ $AB = 0 \Rightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}B \leq n$

Pf

$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$ $\dim V = n - rk(A)$

$B = (\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_k)$ $AB = 0 \Rightarrow A\alpha_i = 0$，对 $1 \leq i \leq k$

$\Rightarrow \alpha_i \in V \Rightarrow \operatorname{Span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\} \subseteq V$

即 $\operatorname{rank}(B) \leq n - \operatorname{rank}(A) \Leftrightarrow \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}(B) \leq n$

例 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ 那么 (Sylvecter 秩不等式)

$\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}(B) - n \leq \operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$

pf.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^m \\ X & \longmapsto & BX & \longmapsto & A(BX) \\ & & Y & \longmapsto & AY \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^m \\ & & \cup & & \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{B} & B\cdot\mathbb{R}^k & \xrightarrow{A|_{rest}} & AB\cdot\mathbb{R}^k \end{array}$$

$$\dim(\ker A|_{rest}) = \dim(\operatorname{Im} B) - \dim(\operatorname{Im} AB) = \operatorname{rank}(B) - \operatorname{rank}(AB)$$

$$\leq \dim(\ker A) = n - \operatorname{rank}(A)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n \leq \operatorname{rank}(AB)$$

(满秩分解)

$A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 则 $\operatorname{rank}A=r \iff \exists$ 秩为 r 的 $m\times r$ 矩阵 B 和秩为 r 的 $r\times n$ 矩阵 C s.t. $A=BC$

Pf "$\Rightarrow$" $\operatorname{rank}A=r \Rightarrow \exists$ 可逆矩阵 $P_{m\times m}$ $Q_{n\times n}$ s.t.

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$=\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}_{m\times r}\begin{pmatrix} I_r & 0\end{pmatrix}_{r\times n}$$

$$\Rightarrow A=\underbrace{P^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}_{m\times r}}_{B}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} I_r & 0\end{pmatrix}_{r\times n}Q^{-1}}_{C}$$

"$\Leftarrow$" $rk(B)+rk(C)-r\leqslant \operatorname{rank}(BC)\leqslant \min\{rk(B),rk(C)\}$

(Frobenius 秩不等式)

$$A \in M_{m\times n} \quad B \in M_{n\times k} \quad C \in M_{k\times l}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(AB) + \mathrm{rank}(BC) \leq \mathrm{rank}(ABC) + \mathrm{rank}(B)$$

Pf

$$\begin{pmatrix} I & A \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ABC & \\ & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ -C & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix}$$

例 A n阶方阵

(1) 若 $\mathrm{rank}\, A^m = \mathrm{rank}\, A^{m+1}$, 对某个 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 成立

则 $\mathrm{rank}\, A^m = \mathrm{rank}\, A^{m+k}$, 对任何 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 成立

(2) $\mathrm{rank}(A^n) = \mathrm{rank}(A^{n+k})$, 对 $\forall\, k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 成立

Pf (1)

- $\mathrm{rank}(A^{m+2}) = \mathrm{rank}(A^{m+1}\cdot A) \leq \mathrm{rank}\, A^{m+1}$
- 由 Frobenius 秩不等式 考虑 $A\cdot A^m \cdot A = A^{m+2}$

$$\mathrm{rank}(A^{m+1}) + \mathrm{rank}(A^{m+1}) \leq \mathrm{rank}(A^{m+2}) + \underset{\substack{\| \text{条件} \\ \mathrm{rank}(A^{m+1})}}{\mathrm{rank}(A^m)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}\, A^{m+1} \leq \mathrm{rank}\, A^{m+2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}\, A^{m+1} = \mathrm{rank}\, A^{m+2} \Rightarrow \mathrm{rank}\, A^m = \mathrm{rank}\, A^{m+k}, \ \forall k \in \mathbb{Z}_{>0}$$

例 (1) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$

法1 线性相关性

$A = (\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_m) \qquad B = (\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n)$

$\operatorname{rank} A = r \Rightarrow$ A列向量组存在极大线性无关组 $\{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}\}$

$\operatorname{rank} B = s \Rightarrow$ B列向量组存在极大线性无关组 $\{\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots \beta_{j_s}\}$

显然 由定义立得 $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$ 中 $i_1, i_2, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s$ 所在列向量是其极大线性无关组，即 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = r+s = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$

法2 利用等价标准型

$\operatorname{rank} A = r \Leftrightarrow \exists$ 可逆方阵 P_1, Q_1 s.t. $P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rank} B = s \Leftrightarrow \exists$ 可逆方阵 P_2, Q_2 s.t. $P_2 B Q_2 = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

注意到

$$\begin{pmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & & & \\ & 0 & & \\ & & I_s & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

初等变换不改变矩阵的秩

$\Rightarrow \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = r+s = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$

注：同样的方法可证

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$$

$\begin{pmatrix} P_1 & \\ & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & & & \\ & 0 & & \\ & & I_s & \\ P_2CQ_1 & & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ 有 $r+s$ 阶子式 $\neq 0$ $\begin{vmatrix} I_r & \\ * & I_s \end{vmatrix} = 1$

(2) 由(1) 只须证 $\mathrm{rank}(A^n) = \mathrm{rank}(A^{n+1})$.

· 如果 A 可逆，那么 $\mathrm{rk}\, A^n = \mathrm{rk}\, A^{n+1} = n$

· 若 A 不可逆

$$n-1 \geq \mathrm{rk}\, A \geq \mathrm{rk}\, A^2 \geq \cdots \geq \mathrm{rk}\, A^n \geq \mathrm{rk}\, A^{n+1} \geq 0$$

$\Longrightarrow$ 存在 k s.t. $\mathrm{rk}\, A^k = \mathrm{rk}\, A^{k+1}$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \mathrm{rk}\, A^k = \mathrm{rk}\, A^{k+1} = \mathrm{rk}\, A^{k+2} = \cdots = \mathrm{rk}\, A^n = \mathrm{rk}\, A^{n+1}$$

例 $A, B \in M_{n\times n}$ 满足 $AB = BA$

那么 $\mathrm{rank}\, A + \mathrm{rank}\, B \geq \mathrm{rank}(A+B) + \mathrm{rank}(AB)$

Pf. 考察线性方程组

$AX = 0$ 的解空间记为 U

$BX = 0$ 的解空间记为 V

$ABX = BAX = 0$ 的解空间记为 W

$(A+B)X = 0$ 的解空间记为 H

$\Rightarrow$ $V, U \subseteq W \Rightarrow U+V \subseteq W$

$U \cap V \subseteq H$

由维数公式

$$\underbrace{\dim U}_{n-\mathrm{rank} A} + \underbrace{\dim V}_{n-\mathrm{rank} B} = \dim(U\cap V) + \dim(U+V) \leq \underbrace{\dim H}_{n-\mathrm{rank}(AB)} + \underbrace{\dim W}_{n-\mathrm{rank}(A+B)}$$

立得

例 $A, B \in M_{n\times n}(F)$（数域）满足 $AB = BA = 0$, $\text{rank}\,A = \text{rank}(A^2)$

那么 $\text{rank}(A+B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

Pf · 由 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^2)$ 得

$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^{1+k})$ 对 $\forall k \in \mathbb{Z}_{>0}$（利用Frobenius秩不等式

· 由于 A^2 的列向量都是 A 列向量的线性组合
$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^2)$
$\Rightarrow$ A^2 与 A 列向量组等价
（可互相线性表出）

特别地，$A = (\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n)$

$A^2 = (\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n)$

$$\alpha_i = k_{i1}\beta_1 + k_{i2}\beta_2 + \cdots + k_{in}\beta_n = [\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n]\begin{pmatrix} k_{i1} \\ \vdots \\ k_{in} \end{pmatrix} = A^2 x_i$$

令 $P = (x_1, \cdots, x_n)$ 即有 $\boxed{A^2 P = A}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} I & \\ A & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A+B & \\ & 0 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} A+B & \\ A^2 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} I & A \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ -P & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & A^2 \\ 0 & A^3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A+B & \\ A^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ & I \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} A+B & A^2 \\ A^2 & A^3 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ $\text{rank}(A+B) \geqslant \text{rank}(B) + \text{rank}(A^3) = \text{rank}(B) + \text{rank}(A)$

例 $A \in M_{n\times n}(F)$

A 幂零 $\Leftrightarrow$ $tr(A^k)=0$，对 $\forall\ 1\leq k\leq n$.

Pf "$\Rightarrow$" 设 $A^l=0$ but $A^{l-1}\neq 0$

显然

$$0\subseteq \ker A\subseteq \ker(A^2)\subseteq\cdots\subseteq \ker(A^l)=F^n$$

选取 $\ker A$ 的一组基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{r_1}\}$

扩充为 $\ker(A^2)$ 的一组基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{r_1},\alpha_{r_1+1},\cdots,\alpha_{r_2}\}$

$\cdots$

扩充为 F^n 的一组基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$

$\Rightarrow$ $AP=P\Lambda$，其中 Λ 为严格上三角阵

$\Rightarrow$ $P^{-1}AP=\Lambda$

$\Rightarrow$ $tr(A^k)=tr(\Lambda^k)=0$ 对 $\forall\ 1\leq k\leq n$

"$\Leftarrow$" 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $\det(A-\lambda I)$ 的根（特征值）

$$\det(A-\lambda I)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$
$$=\lambda^n+f_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+f_0\lambda_1\cdots\lambda_n$$

其中 f_i 为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的对称多项式 记 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 初等对称阵

由牛顿恒等式 (Newton) $\sigma_1=S_1$ $\quad S_k=\sum_{i=1}^n\lambda_i^k=tr(A^k)$

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_1=S_1\\&S_1\sigma_1-2\sigma_2=S_2\\&S_2\sigma_1-S_1\sigma_2+3\sigma_3=S_3\\&S_k\sigma_1-S_{k-1}\sigma_2+\cdots+(-1)^{k+1}k\sigma_k=S_k\end{aligned}\right\}\Rightarrow \sigma_k=\frac{1}{k!}\begin{vmatrix}S_1 & 1 & & \\ S_2 & S_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ S_k & \cdots & S_2 & S_1\end{vmatrix}=0\quad \det(A-\lambda I)=\lambda^n \quad\square$$

例 证明 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(AA^T)$$

Pf 设 $\operatorname{rank} A = r$ 则 $\operatorname{rank}(AA^T) \leqslant \operatorname{rank} A$

由子式和秩的关系，只须找一个 r 阶 (AA^T) 的非零子式.

那么 $\operatorname{rank}(AA^T) \geqslant r$，结论立得

$\operatorname{rank}(A) = r \Rightarrow$ A 中存在 r 阶非零子式

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \neq 0$$

由 Cauchy-Binet 公式

$$(AA^T)\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = \sum_{k_1<k_2<\cdots<k_r} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} A^T\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k_1<\cdots<k_r} \left(A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix}\right)^2 \geqslant 0$$

且

$$\left(A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}\right)^2 > 0$$

$$\Rightarrow (AA^T)\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} > 0$$

$\square$